Prof. Dr. A. Kerber Wintersemester 2005/06

Codierungstheorie II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zwei nummerierte Graphen $g_1, g_2 \in 2^{\binom{n}{2}}$ heißen *komplementär*, falls gilt:

$$g_1(\{i,j\}) = 0 \Longleftrightarrow g_2(\{i,j\}) = 1\,.$$

(d.h. g_2 hat genau dort Kanten, wo g_1 keine Kanten hat.) Ein Graph heißt selbstkomplementär, falls er isomorph zu seinem Komplement ist. Wir möchten im Folgenden die Anzahl der selbstkomplementären Graphen auf n Punkten bestimmen:

Nach dem Lemma von Cauchy-Frobenius ist die Anzahl aller Graphen auf n Punkten, d.h. die Anzahl der Bahnen unter Operation der S_n, gleich:

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n} 2^{c(\bar\pi)}\,.$$

(Betrachtet man die induzierte Zykelstruktur $c(\bar\pi)$ genauer, so kann man diese Anzahl noch weiter spezifizieren: $\sum_{a\dashv\vdash n}\frac{2^{c_{\bar a}}}{\prod_i i^{a_i}a_i!}$, mit $c_{\bar a} := \frac{1}{2}\sum_i ia_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ ungerade}} a_i + \sum_{r<s} a_r a_s \gcd(r,s)$. Dies ist aber für diese Aufgabe nicht nötig.)

Fassen wir einen Graphen und sein Komplement in einer Äquivalenzklasse zusammen, so können wir die Anzahl der Graphen unter Umnummerierung und Komplementierung abzählen, indem wir die Gruppe $S_2 \times S_n$ auf der Menge $Y^X = 2^{\binom{n}{2}}$ operieren lassen. Wir erhalten als Anzahl der Bahnen unter dieser Gruppenoperation (verifizieren!):

$$\frac{1}{2n!}\Big(\sum_{\pi\in S_n} 2^{c(\bar\pi)} + \sum_{\pi\in S_n,\bar\pi \text{ enthält nur gerade Zykel}} 2^{c(\bar\pi)}\Big)\,.$$

Leiten Sie aus diesen beiden Anzahlen die Anzahl der selbstkomplementären Graphen ab.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Es sei ${}_GX$ Gruppenoperation, $\bar G \leq S_X$ die induzierte Einbettung von G in S_X. Wir betrachten die Automorphismengruppe G_f einer Abbildung $f \in Y^X$. Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe als Schnitt von $\bar G$ mit einer Young-Untergruppe von S_X geschrieben werden kann, d.h. es gibt eine Partition α von X, mit:
$$\bar G_f = \bar G \cap S_\alpha\,.$$

b) Es gibt keinen Graphen auf $n\ \geq 3$ Punkten, der die alternierende Gruppe A_n als Automorphismengruppe hat.

Abgabe: Montag, den 9.1.2006, 10:00 Uhr im Raum 3.2.O2.737