Unabhängigkeit ℓ-adischer Galois-Darstellungen über Funktionenkörpern.

(Gemeinsam mit Gebhard Böckle und Wojciech Gajda)

Sei K ein Körper und $\mathbb{L}$ die Menge aller Primzahlen. Für jede Primzahl $\ell \in \mathbb{L}$ sei $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(K) \to G_\ell$ ein Homomophismus von Gruppen und

$$\rho : \mathrm{Gal}(K) \to \prod_{\ell \in \mathbb{L}} G_\ell$$

der von den ρ_ℓ induzierte Homomorphismus. Man nennt die Familie $(\rho_\ell)_{\ell \in \mathbb{L}}$ *fast unabhängig*, wenn es eine endliche separable Erweiterung E/K mit $\rho(\mathrm{Gal}(E)) = \prod_{\ell \in \mathbb{L}} \rho_\ell(\mathrm{Gal}(E))$ gibt.

Wichtige Beispiele solcher Familien von Homomorphismen entstehen wie folgt: Wenn A eine abelsche Varietät über K ist, so betrachten wir für jede Primzahl $\ell \in \mathbb{L}$ die Darstellung

$$\sigma_{A,\ell} : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Aut}(T_\ell(A))$$

der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K)$ auf dem ℓ-adischen Tate-Modul $T_\ell(A)$. Ein klassischer Satz von Serre besagt, dass für jede abelsche Varietät A über einem *Zahlkörper* K die Familie $(\sigma_{A,\ell})_{\ell \in \mathbb{L}}$ fast unabhängig ist. In einem aktuellen Preprint beweist Serre einen analogen Satz für die Familie $(\rho_{X,\ell})_{\ell \in \mathbb{L}}$ von Darstellungen

$$\rho_{X,\ell} : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Aut}\left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$

von $\mathrm{Gal}(K)$ auf der étalen Kohomologie eines beliebigen separierten algebraischen Schemas X über einem *Zahlkörper* K. Wir beantworten die Frage von Serre und Illusie, ob man diese Ergebnisse auf den Fall verallgemeinern kann, in dem $K/\mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung vom Transzendenzgrad $\mathrm{trdeg}(K/\mathbb{Q}) \geq 1$ ist. Ferner analysieren wir die Situation im Fall eines endlich erzeugten Grundkörpers K positiver Charakteristik.